Corrigé du Problème

I) De quoi s'agit-il ?

A : Etude d'une fonction en exponentielle
B : Théorème des accroissements finis
C : Approche de la valeur qui annule f, par une suite réelle.

II) Indication et commentaire

A) $f(x)=2\,e^{-x}-e^{-2x}-x$

1°)Les variations de f

Vérifier que f est dérivable sur IR et que pour tout réel x :

$f'(x)=2\,e^{-2x}-2\,e^{-x}-1=2\,(e^{-x}-\frac{1+\sqrt{3}}{2})(e^{-x}+\frac{\sqrt{3}-1}{2})$

Déduire que f'(x) s'annule pour $x=-\mathrm{Log}(\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ et et son signe est celui de $(e^{-x}+\frac{\sqrt{3}+1}{2})$.

* Il est simple de trouver que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Pour la limite de f(x) quand x tend vers -∞, penser à écrire f(x) sous la forme:

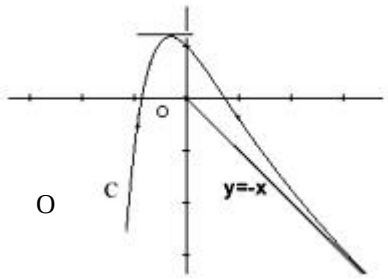
$f(x)=xe^{-x}[\frac{2}{x}+\frac{e^{-x}}{-x}-e^{x}]$ et trouver que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2°) Existence et unicité d'un réel a **tel que** a Î **[Log2, 1]**

Utiliser que f est continue et strictement décroissante sur [Log2,1] et que f(Log2).f(1)<0 pour répondre à cette question

3°) La courbe représentative de la fonction f :

Vérifier que : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=0$ et déduire que la droite d'équation y=-x est une asymptote à *C*



B) g dérivable sur [a,b]

g' continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[

1) L'expression de j **'(x) :**

Soit $x\in$]a,b[, Vérifier que : $\varphi'(x)=(x-b)g''(x)+2[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-x)$

2) a) Vérification de j **(a)=** j **(b)=0**

On vérifie facilement que : φ (a)= φ(b)=0

b) Existence d'un réel c de]a,b[tel que j **'(c)=0**

On indique qu'on utilise le théorème des accroissements finis pour répondre à la question.

Vérifier que : φ est continue sur [a,b] et φ dérivable sur]a,b[:

Les hypothèses du théorème étant vérifiées, on peut conclure qu'il existe c de]a,b[tel que :

φ (b)- φ (a)=(b-a) φ' (c). Conclure

3°) Vérification de l'égalité g(b)=g(a)+(b-a)g'(a)+ $\frac{b-a}{2}$ g''(c).

Utiliser φ'(x) pour x=c, ce qui donne : $\varphi'(c)=(c-b)g''(c)+2\frac{b-c}{(b-a)^2}[g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)]$

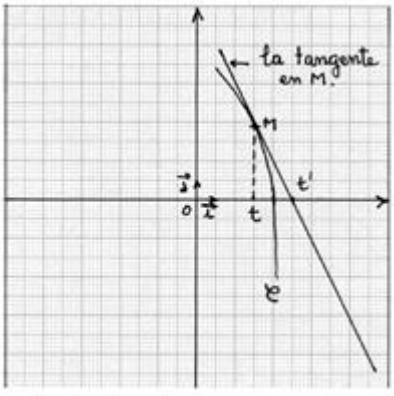
Sachant que φ'(c)=0 , déduire alors l'égalité demandée.

C) 1) Vérification de h'(x)<0 et h"(x)>0 pour x Î]log2,1[

On a : h'(x)=f'(x) pour tout x de]Log2,1[
Utiliser A)1) pour justifier que h'(x)<0
Vérifier que $h''(x)=2e^{-2x}[e^{x}-2]$. Son signe est celui de $e^{x}-2$
Comme x>Log2, vérifier que h"(x)>0

2°)a) Montrer que $t'=t-\frac{h(t)}{h'(t)}$

Se rappeler que l'équation de la tangente à C au point M de coordonnées (t,h(t)) pour t de]Log2,1[est : y=h'(t)(x-t)+h(t).
Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point de coordonnées (t',0). Déduire alors que : $t'=t-\frac{h(t)}{h'(t)}$



b)Existence de k Î]t, a **] tel que** $t'=\alpha+\frac{(\alpha-t)^2 h''(k)}{2h'(t)}$

Vérifions les conditions qui permettent d'appliquer la question B)3°). h est continue et deux fois dérivables sur [t, α] donc on peut dire qu'il existe k de]t,α[tel que

$h(\alpha)=h(t)+(\alpha-t)h'(t)+\frac{(\alpha-t)^2}{2}h''(k)$. Or h(α)=f(α)=0, d'où, en divisant l'égalité précédente on obtient $0=\frac{h(t)}{h'(t)}+\alpha-t+\frac{(\alpha-t)^2 h''(k)}{2h'(t)}$

Utiliser que t'=t- $\frac{h(t)}{h'(t)}$ puis conclure

c) Déduction de t' Î]Log2, a **[**

Ecrire que $t'=\alpha+\frac{(\alpha-t)^2 h''(k)}{2h'(t)}$ et utiliser que (h'(x)<0 et h"(x)>0 pour tout x de]Log2,α[)

Conclure

3°) On se propose dans cette question de déterminer une suite réelle qui converge vers α

a)Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ x_n Î]Log2, a**[**

on peut utiliser le raisonnement par récurrence :

$x_0 \in]Log2,\alpha[$ vrai par hypothèse

Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons que $x_n \in]Log2,\alpha[$.

Utiliser C)2°) pour prouver que $x_{n+1} \in]Log2,\alpha[$. Conclure.

Remarque : la relation vérifiée par x_{n+1} et x_n est la même que celle qui relie t' et t . Observer les deux égalités : $t'=t-\frac{h(t)}{h'(t)}$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$

b) (x_n) converge

Prouver que (x_n) est une suite croissante en utilisant $x_{n+1}-x_n = -\frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$

Par suite x_n est croissante et majorée par α. Conclure.

*** Limite de (x_n)**

Poser : $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$

Soit la fonction Ψ : $x \to x-\frac{h(x)}{h'(x)}$ pour $x \in [Log2,\alpha]$

Vérifier que : Ψ est continue sur $[Log2,\alpha]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [Log2,\alpha]$ et $\Psi(x_n) = x_{n+1}$

(x_n) converge vers $\ell \in [Log2,\alpha]$

en déduire que $\ell = \Psi(\ell)$ puis $\ell = \alpha$

4°)a)On a $x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha + \frac{h(\alpha) - h(x_n)}{h'(x_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Montrons qu'il existe c_n Î]Log2, a**[tel que :**

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$$

On a $x_n \in]Log2,\alpha[$ et $t' = x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$

Utiliser C2°)b) (x_n remplace t) , il existe $k=c_n \in]x_n,\alpha[$ tel que :

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{(\alpha - x_n)^2 h''(c_n)}{2h'(x_n)}$$ d'où l'égalité

On peut procéder autrement

Utiliser B3°) avec g=h, b=α et a= x_n on obtient : $h(\alpha)=h(x_n)+h'(x_n)(\alpha-x_n)+\frac{(\alpha - x_n)^2}{2}h''(c_n)$

Justifier cette égalité

b) Montrons que pour tout n Î IN on a : $\left|\frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}\right| < 1$

utiliser que : $h'(x)<0$ pour x de]Log2,1[et montrer que $h''(x)>0$ pour tout x de]Log2,1[.

Déduire que : $0<h''(c_n)<h''(1)$ (car $Log2<c_n<1$) et que $-\frac{3}{2} < h'(x_n) < h'(1) < 0$:

D'où : $\left|\frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}\right| < \frac{h''(1)}{-2h'(1)}$ .Conclure.

c) Déduction de : $|x_{n+1} - \alpha| < (x_n - \alpha)^2$ **pour n Î IN**

Déduction immédiate de b)

5°)Détermination de n_0 tel que pour $n>n_0$ on a : ¦x_n-a ¦<10^{-5}

Prouver d'abord que pour tout n∈ IN on a $|x_n - \alpha| < (x_0 - \alpha)^{2^n}$.(par itération ou par récurrence)

Par suite, pour avoir $|x_n - \alpha| < 10^{-5}$, il suffit de trouver le plus petit n tel que :

$(31\times10^{-2})^{2^n} < 10^{-5}$. Pour la suite des calculs on a besoin d'appliquer log aux deux membres de l'inégalité.(log= logarithme décimal). Ce qui donne $2^n\log(31x10^{-2})<-5$

Achever le calcul pour trouver $n_0=4$.