Corrigé du Problème

I) De quoi s'agit-il ?

A : Fonctions en exponentielle, fonction définie à l'aide d'une intégrale
B : Suite réelle définie à l'aide d'une intégrale.

II) Indication et commentaire

1°)$\varphi(x)=e^x(2-x)-2$

a) Variation de j

$\varphi'(x)=e^x(1-x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$. Le signe de $\varphi(x)$ est celui de 1-x. Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=-2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty$

***Remarque** : Le tableau de variation de j vous aide à résoudre les questions b) et c).*

b) j **(x)=0 admet une seule solution**

Remarquer que φ est une bijection de $]-\infty,1[$ sur $]-2,e-2[$, de même φ est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]-\infty,e-2[$ Comme $e-2>0$ et $\varphi(0)=0$, en déduire le résultat.

c) Signe de j **(x)**

tableau de variations de φ

Vérifier que : $\varphi(x)>0 \Leftrightarrow x\in]0,a[$

$\varphi(x)<0\Leftrightarrow x\in]-\infty,0[\cup]a,+\infty[$.

2°)a) Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$

A-t-on $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=f(0)$? Conclure.

On pourra écrire que : $f(x)=\dfrac{x}{\dfrac{e^x-1}{x}}$ si $x\neq 0$

f est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Que peut-on conclure ?

Réponse : f est continue en 0 et f est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$

b) **Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$**

Vérifier que f est dérivable en 0 et calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et que $f'(0)=1$.

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Conclure

Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a $f'(x)=\dfrac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$

c) Montrons que f(a)=a(2-a)

Utiliser le fait que a est une solution de l'équation $\varphi(x)=0$. Donc $\varphi(a)=0\Leftrightarrow e^a=\dfrac{2}{2-a}$

Achever le calcul.

d) Variation et courbe de f

Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ est celui de $x\varphi(x)$.

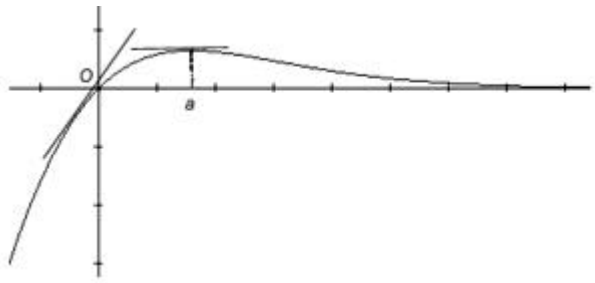
Pour x=0 ce n'est plus vrai et considérer simplement $f'(0)=1$

Vérifier que : $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f=0$

Pour la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$, on écrira f(x) sous la forme : $f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{e^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}$ et

poser x=2t avec t tend vers $+\infty$

Préciser la nature des branches infinies au voisinage de +∞ et de -∞
Représentation graphique de f : (Recommandation d'ordre général)
Tracer un repère en indiquant son origine et ses vecteurs et en respectant éventuellement l'unité donnée
Tracer les tangentes, demi-tangentes ou asymptotes éventuelles de la courbe
Enfin tracer la courbe en vous référant au tableau de variation



3°) Pour $x \in \mathbb{R}+$ on a $F(x)= \int_0^x f(t)dt$

a) Existence de F(x)

Se rappeler que pour montrer que $\int_a^b f(t)dt$ *existe, il suffit que f soit continue sur l'intervalle [a, b]*

Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}+$, $0 \in \mathbb{R}+$ et $x \in \mathbb{R}+$. Conclure.
On peut procéder autrement
Les deux conditions (f est continue sur $\mathbb{R}+$ et $O \in \mathbb{R}+$) permettent de déduire que F est la primitive de f sur $\mathbb{R}+$ qui s'annule en 0 et par conséquent :

- F(x) existe
- F est dérivable sur $\mathbb{R}+$
- $F'(x)=f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}+$

b) montrons que f est continue et strictement croissante sur [0,+¥ [
D'après a) F est la primitive de f sur $\mathbb{R}+$.
En déduire que F continue sur $\mathbb{R}+$.
Quel est le signe de f(x) pour x>0 ? Conclure

c) La forme de l'intervalle F(I)
Se rappeler que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
Et si en plus la fonction est strictement monotone on peut déterminer la forme de l'image de cet intervalle
On a F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}+$.
En déduire que $F(I)=[0, \lim_{+\infty} F$ [.

4°) pour x Î $\mathbb{R}+$ G(x)= $\int_{\text{Log}2}^x t^2 e^{-t} dt$

a) Existence de G(x)
Même procédé que dans la question 3)a)

b) Calcul de G(x)
pour la première intégration par parties

poser $u(t)=t^2$ et $v'(t)=e^{-t}$
pour la 2ème intégration par parties
poser $u(t)=t$ et $v'(t)=e^{-t}$
Vérifier que l'on obtient : $G(x)=-(x^2+2x+2)e^{-x}+1/2(Log2)^2+Log2+1$

La limite de G(x) en +¥

Comment montrer que $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ *: (avec n Î ℕ*) ?*

On peut poser x=nt comme x tend vers +¥, t tend vers +¥ et on obtient

$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} n^n (te^{-t})^n = 0$

En déduire que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{1}{2}(Log2)^2 + Log2 + 1$

c) Montrons que : pour t Î [log2,+¥[on a f(t) £$2t^2e^{-t}$

Remarquer que : $f(t)\le 2t^2e^{-t} \Leftrightarrow \frac{t^2}{e^t-1} \le \frac{2t^2}{e^t} \Leftrightarrow \frac{1}{e^t-1} \le \frac{2}{e^t}\ (t^2>0)$

Comme les deux membres sont strictement positifs on peut passer à l'inverse. Achever le raisonnement

Existence de M

On va distinguer deux cas

* Si x≥Log2

On peut écrire $F(x) = \int_0^{Log2} f(t)dt + \int_{Log2}^{x} f(t)dt$

Utiliser que $f(t)\le 2t^2e^{-t}$ pour montrer que $\int_{Log2}^{x} f(t)dt \le 2G(x)$

Prouver alors que $F(x) \le \int_0^{Log2} f(t)dt + 2G(x)$

Utiliser ensuite l'expression de G(x) pour montrer que si x≥Log2 on a : que F(x) ≤M avec $M=F(Log2)+(Log2)^2+2Log2+2$

* Si x≤Log2

Utiliser le sens de variation de F pour trouver que F(x) ≤F(Log2)

* Conclure que pour tout x∈IR+ F(x)≤M

d) Déduction de $\lim_{x\to+\infty} F(x) \le M$

Se rappeler que si une fonction est croissante et majorée sur IR+, elle admet une limite finie en +¥

On a : F est croissante et majorée par M sur IR+, on peut conclure que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = L$ avec L un réel fini

Déduire de (F(x) ≤M pour tout x ∈ ℝ+) que (L ≤ M).

B)Dans cette partie n∈ *

1°)a) Montrons l'égalité pour x>0 $e^{-x} + e^{-2x} + ... + e^{-nx} = e^{-x}[\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}] = \frac{1-e^{-nx}}{e^x-1}$

Remarquer que $e^{-x} + e^{-2x} + ... + e^{-nx} = e^{-x}[\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}] = \frac{1-e^{-nx}}{e^x-1}$ est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison e^{-x} et de 1er terme e^{-x}

Vérifier que la raison est différente de 1

En déduire que $e^{-x}+e^{-2x}+...+e^{-nx}=e^{-x}[\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}]=\frac{1-e^{-nx}}{e^{x}-1}$

Achever le calcul

b) Montrons que pour tout réel positif x on a : $0\le\int_0^x f(t)e^{-nt}dt\le\frac{a(2-a)}{n}$

Utiliser le tableau de variation de f pour montrer que : $0\le f(x)\le f(a)$; pour tout $x\in\mathbb{R}+$

En déduire que $0\le\int_0^x f(t)e^{-nt}dt\le f(a)\int_0^x e^{-nt}dt$

Montrer que $\int_0^x e^{-nt}dt=\frac{1}{n}-\frac{e^{-nx}}{n}$

Conclure

c) Calcul de $I_n(x)=\int_0^x t^2e^{-nt}dt$

Calculer $I_n(x)$ à l'aide de deux intégrations par parties.

Montrer qu'on a : $I_n(x)=e^{-nx}[-\frac{x^2}{n}-\frac{2x}{n^2}-\frac{2}{n^3}]+\frac{2}{n^3}$

d) Limite de $I_n(x)$ quand x tend vers +¥

Ecrire $I_n(x)$ sous la forme : $I_n(x)=-\frac{x^2}{n}e^{-nx}-\frac{2x}{n^2}e^{-nx}-\frac{2}{n^3}e^{-nx}+\frac{2}{n^3}$

Calculer la limite de chaque terme puis déduire que :

$\lim_{x\to+\infty} I_n(x)=\frac{2}{n^3}$ (n étant fixé dans IN*)

2°)

a) Montrons que pour x Î ℝ+ : $\sum_{k=1}^{n} I_k(x)=F(x)-\int_0^x f(t)e^{-nt}dt$

Ecrire $\sum_{k=1}^{n} I_k(x)=\int_0^x t^2[e^{-t}+e^{-2t}+....+e^{-nt}]dt$

Utiliser B1°)a) et vérifier que : $t^2[e^{-t}+e^{-2t}+\ldots+e^{-nt}]=f(t)-f(t)e^{-nt}$, en distinguant deux cas le cas où t>0 on a $f(t)=\frac{t^2}{e^t-1}$ et si t=0 ; f(0)=0. Conclure.

Montrons que $\lim_{x\to+\infty} H_n(x)=\ell_n$

Vérifier que $H_n(x)=F(x)-\sum_{k=1}^{n} I_k(x)$ puis utiliser que $\lim_{x\to+\infty} F(x)=L$ et que $\lim_{x\to+\infty} I_k(x)=\frac{2}{k^3}$

Conclure

b) Montrons que (ℓ_n) converge vers 0

Remarquer que dans cette question c'est la variable n (et non x) qui tend vers l'infini

Utiliser la double inégalité de B)1)b) à savoir que :

$0\le H_n(x)\le\frac{a(2-a)}{n}$; pour tout $x\ge 0$ et que : $\lim_{x\to+\infty} H_n(x)=\ell_n$

Remarquer que le 1er membre et le 3ème membre ne dépendent pas de n

Comme : on a : $\lim_{x\to+\infty} H_n(x)=\ell_n$ donc : $0\le\ell_n\le\frac{a(2-a)}{n}$

Prouver que (ℓ_n) est encadrée par deux suites qui convergent vers 0

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \ell_n = 0$

c) On a : $U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3}$

Montrons que (U_n) est convergente et sa limite L'=$\frac{L}{2}$

Il suffit d'écrire que $U_n = \frac{L - \ell_n}{2}$