Corrigé de l'exercice 1

I) De quoi s'agit-il ?

Etude d'une fonction racine carré d'un trinôme du second degrés
Fonction définie à l'aide d'une intégrale - calcul d'aire

II) Indications et commentaires

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$

1°)a)Tableau de variation de f

Remarquer que la fonction $u(x)=x^2-4x+5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u(x)>0$ et par suite $f=\sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Vérifier que $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

b)Asymptotes obliques de *C*

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-2$

En déduire que la droite (Δ) d'équation y=x-2 est une asymptote à *C* au voisinage de $+\infty$

Lorsque x tend vers $-\infty$; n'oublier pas que $\sqrt{x^2}=-x$.

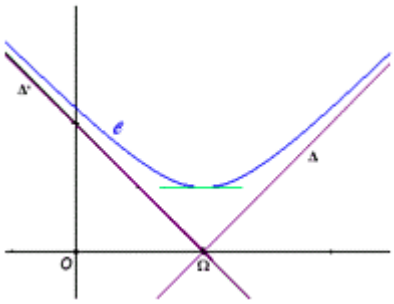
Pour calculer la limite de (f(x)+x)) en $-\infty$ écrire $f(x)+x=\dfrac{-4+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1}$

En déduire que la droite Δ' d'équation y=-x+2 est une asymptote au voisinage de $-\infty$.

c)Tracés de D**,** D**' et C**

Remarques :

C et *C*' se coupent sur l'axe des abscisses en Ω(2,0).



*(*C*) coupe l'axe des ordonnées au point $A(0,\sqrt{5})$.

2°)Ω(2,0).

a)Equation cartésienne de *C* **dans** $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

Se rappeler qu'une équation cartésienne d'une courbe dans un repère donné est une égalité vérifiée par les coordonnées d'un point de cette courbe dans le repère donné

Et par suite, on peut exprimer les coordonnées (x,y) d'un point M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ *en fonction de (X,Y) coordonnées du point M dans le nouveau repère* $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

Vérifier que (x=2+X et y =0+Y).

Remplacer dans l'équation de *C* : y= $\sqrt{x^2+-4x+5}$; x et y par leurs expressions en fonction de X et Y

On trouve : Y=$\sqrt{1+X^2}$

b-C est la représentation graphique de g dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

Dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, on a C :Y=$\sqrt{1+X^2}$

C'est par définition, la représentation graphique de l'application g : $X\to\sqrt{1+X^2}$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$**.**

Cette question vous permet de vous corriger si éventuellement vous vous êtes trompés dans la question a).

Et dans le cas où vous n'avez pas su répondre à la question a), la fonction g définie au b), permet de poursuivre la résolution de la suite de l'exercice.

3°)Pour $x\in\mathbb{R}$, F(x)= $\int_0^{u(x)} g(t)dt$) avec u(x)= $\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})$

a)Résolution dans $\mathbb{R}$ **de u(x)=1**

Vérifier que u(x)-1=$\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}(e^x-2e^{\frac{x}{2}}-1)$

On a u(x)=1 $\Leftrightarrow e^x-2e^{\frac{x}{2}}-1=0$

Poser $X=e^{x/2}$ et résoudre degrés $X^2-2X-1=0$

On obtient $X'=1-\sqrt{2}<0$ et $X''=1+\sqrt{2}>0$

En déduire que l'équation u(x)=1 admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ égale à $2\text{Log}(1+\sqrt{2})$.

b) F dérivable sur $\mathbb{R}$

Penser à considérer G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.G existe car g est continue sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que F(x)=G(u(x))-G(0)

Comment justifier la dérivabilité de F ?

Gou est une composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et par suite F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (G(0) est une constante).

Expression de F'(x)

Remplacer u'(x) par sa valeur $\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})$ et G'(u(x)) par :$g(u(x))=\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2}$

Utiliser que $(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2=e^x+e^{-x}+2$.

Conclure.

c) L'aire de la partie limitée par C et les droites x=2, x=3 et y=0

Hachurer cette partie

Remarquer que $A=\int_2^3 f(x)dx$ ou $A=\int_0^1 g(x)dx$

On ne peut pas calculer directement $A=\int_2^3 f(x)dx$, car on ne connaît pas une primitive de f

On va plutôt utiliser $A=\int_0^1 g(x)dx$.

Vérifier que $\int_0^1 g(x)dx=F(2\text{Log}(1+\sqrt{2}))$

Puis $A=\frac{1}{4}(1+\text{Log}(1+\sqrt{2}))$ u.a .