Corrigé du Problème :

I) De quoi s'agit-il ?

I. Etude d'une fonction en exponentielle. Dérivée d'une fonction réciproque. Primitive.

II. Etude d'une famille de fonctions définies à l'aide d'une intégrale.

Etude d'une suite rélle.

II) Indications et commentaires

1°) a. Etude des variations de la fonction f :

Vérifier que $f'(x) = -\dfrac{-2e^{-x}(e^{2x}-1)}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}$

On pourra remarquer que f est une fonction paire et réduire l'intervalle d'étude à $[0, +\infty[$.

Tableau de variation de f

$\lim\limits_{+\infty} f = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$.
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0		1		0

Pour tout x de IR on a : $o < f(x) \leq 1$:

Justifier $f(IR_+) = f(IR_-) =]0,1]$

et conclure.

b. La courbe de f :

2°) a. g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Ecrire : g = Log o tg

tg est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et tg x >0 pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Conclure.

Vérifier que $g'(x) = \dfrac{1+tg^{2}x}{tgx}$

b) **g admet une fonction réciproque h définie sur IR :**

Montrer que g est continue et strictement croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$\lim_{x \to 0+} \text{Log (tgx)} = -\infty$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \text{Log (tgx)} = +\infty$

(on pourra poser X = tgx)

Conclure

Calcul de h(0) :

Soit $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ h (0) = x <=>Log (tgx) = 0…

<=>……

$h(0) = \frac{\pi}{4}$

c) h dérivable sur IR :

On a : g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc :

pour tout $y \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $g'(y) \neq 0$ $h = g^{-1}$ est dérivable sur IR

Pour tout x ∈ IR 2h' (x) = f(x) :

pour tout x ∈ IR

pour tout $y \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ h(x) = y <=> x = g(y)

<=> x = Log (tgy)

<=> e^X = tgy

or $h'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{tgy}{1 + tg^2 y}$ Achever les calculs.

$\int_0^x$ f (t) dt = 2 h(x) - $\frac{\pi}{2}$:

Se rappeler :

h est une primitive de sa dérivée h'.

$\int_a^b h'(t)\,dt = h(b) - h(a)$

dans $\int_0^x f(t)\,dt$; remplacer f(t) par 2 h'(t)

II) 1°)a) F_1 (x) en fonction de h(x) :

$F_1(x) = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$

on a : $h\left(\left]-\infty, +\infty\right[\right) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

D'autre part h est continue et strictement croissante (comme sa réciproque g) par suite

$h\left(\left]-\infty, +\infty\right[\right) = \left]\lim\limits_{-\infty} h, \lim\limits_{+\infty} h\right[$

en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} h = \frac{\pi}{2}$ et conclure.

b) * $\mathbf{K'(t) = f^2(t)}$

Remarque :

$\left(e^t + e^{-t}\right)^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2$

$\left(e^t - e^{-t}\right)^2 = e^{2t} + e^{-2t} - 2$

Vérifier que $K'(t) = \frac{4}{\left(e^t + e^{-t}\right)^2}$ et conclure

* Ecrire que $F_2(x) = \int_0^x K'(t)\, dt = \left[K(t)\right]_0^x$

et trouver : $F_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} F_2(x) = 1}$

On pourra écrire $F_2(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1}$ et poser $X = e^{2x}$

2°) a) $\mathbf{F_n\left(\left[0, +\infty\right[\right) = \left[0, \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)\right[}$

on a : $F_n(0) = 0$

Il suffit de prouver que : $\begin{pmatrix} F_n \text{ est continue et} \\ \text{croissante sur } [0, +\infty[\end{pmatrix}$

Se rappeler que :

- *Soit φ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$*
  la fonction : $f : I \to IR$

$x \to \int_a^x \varphi(t)\,dt$ *est la primitive de* φ

sur I qui s'annule en a.

Prouver alors que : • F_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $F'_n = f^n$

et comme pour tout réel x : $f(x) > 0$ alors $f^n(x) > 0$

Achever la démonstration.

b) Pour tout $t \geq 0$ $\quad f(t) < 2e^{-t}$:

On peut écrire que $\quad e^t + e^{-t} > e^t > 0$

donc $\quad \dfrac{1}{e^t + e^{-t}} < \dfrac{1}{e^t}$

multiplier par 2 les deux membres et conclure

Pour tout $x \geq 0$ $\quad F_n(x) \leq 2$:

Remarque : $0 < X < 1 \Rightarrow 0 < X^n < X$

(La suite (X^n) est strictement décroissante).

Prouver que $f^n(t) \leq f(t)$ et par suite : $f^n(t) \geq 2e^{-t}$.

En intégrant les deux membres entre 0 et x ($x \geq 0$) on obtient

$\int_a^x f^n(t)\,dt \leq \left[-2e^{-t}\right]_o^x \quad <=>$

$F^n(x) \leq 2 - 2e^{-x}$

Conclure

*** $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$ est finie**

D'après II 2°) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$ existe

de plus pour tout $x \geq 0$ $\quad 0 \leq F_n(x) \leq 2$

on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) \in [0,2]$

donc elle est finie

c) * pour tout $t \geq 0$ $f(t) \geq e^{-t}$

Vérifier que : $f(t) - e^{-t} = \dfrac{1 - e^{-2t}}{e^t + e^{-t}}$

et que $1 - e^{-t} \geq 0$

*** Pour tout $x \geq 0$ $\quad \dfrac{1 - e^{-nx}}{n} \leq F_n(x)$:**

on a : $f(t) \geq e^{-t} > 0 \Rightarrow f^n(t) \geq e^{-nt}$

$$\Rightarrow \quad (x \geq o) \int_0^x f^n(t)\,dt \geq \int_0^x e^{-nt}\,dt$$

Terminer

* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) \neq 0$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - e^{-nx}}{n} = \dfrac{1}{n}$ On en déduit que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$ est réel $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) \geq \dfrac{1}{n} > 0$ par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) \neq 0$

$F_n(x) \geq \dfrac{1 - e^{-nx}}{n}$

3°) a- $u_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} F_2(x) = 1$

b- pour tout $n \in IN^*$ et $t \in [\,0\,, +\infty\,[$:

$$\mathbf{f^{n-1}(t)\, f'(t)\, K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)}$$

On a : $f^{n-1}(t)\, f'(t)\, K(t) = \left(\dfrac{2^{n-1}}{(e^t + e^{-t})^{n-1}}\right)\left(\dfrac{-2(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}\right)\left(\dfrac{(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}\right)$

$$-\frac{2^n[4 - (e^t + e^{-t})^2]}{(e^t + e^{-t})^{n+2}} - \frac{2^{n+2}}{(e^t + e^{-t})^{n+2}} - \frac{2^n}{(e^t + e^{-t})^n}$$

$$= f^{n+2}(t) - f^n(t)$$

c- Intégration par parties :

On pose : $u'(t) = f^{n-1}(t)\, f'(t)$ $u(t) = \dfrac{1}{n} f^n(t)$

d'où

$v(t) = K(t)$ $v'(t) = K'(t) = f^2(t)$

Par suite :

$\int_0^x f^{n-1}(t)\, f'(t)\, K(t)\, dt = \left[\frac{1}{n} K(t) f^n(t)\right]_0^x - \frac{1}{n}\int_0^x f^n(t)\, f^2(t)\, dt.$ et terminer les calculs.

d- Pour tout $n \in IN^*$ et $x \in [\,0\,, \infty\,[$:

$(n+1)\, F_{n+2}(x) - n\, F_n(x) = K(x)\, f^n(x)$:

d'après **c)** : $K(x) f^n(x) = n \int_0^x f^{n-1}(t) f'(t) K(t)\, dt + \int_0^x f^{n+2}(t)\, dt.$

d'après **b)** $= n.\int_o^x \left((f^{n+2}(t) - f^n(t)\right) dt + \int_0^x f^{n+2}(t)\, dt.$

Achever les calculs.

*** $u_{n+2} = \frac{n}{n+1} u_n$:**

On peut écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} (n+1) F_{n+2}(x) - \lim_{x \to +\infty} (n F_n(x)) = \lim_{x \to +\infty} K(x) f^n(x).$$

$\Leftrightarrow (n+1) u_{n+2} - n u_n = \lim_{x +\infty} K(x) f^n(x).$

On sait que : $0 < f^n(x) \leq 1.$ et $K(x) \geq 0$

$$0 \leq K(x) f^n(x) \leq K(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} K(x) = 0$$

On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} K(x) f^n(x) = 0$

conclure

4- a) $n \in IN$:

On peut écrire $u_3 = \frac{1}{2} u_1$

$$u_5 = \frac{3}{4} u_3$$

On multiplie membre à membre et on simplifie par les u_k

$$u_{2n+1} = \frac{2n-1}{2n} u_{2n-1}$$

Remarquer que $u_k = \lim_{x \to +\infty} F_k(x) \neq 0$.

On obtient : $u_{2n+1} = \frac{3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \times \frac{\pi}{2}$.

Procéder de la même manière pour trouver :

$$u_{2n+2} = \frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)}$$

b- (u_n) est décroissante :

$$u_{n+1} - u_n = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f^n(t)\,(f(t) - 1)\,dt.$$

le signe de $(f(t) - 1)$ permet de conclure

c- Pour tout $n \in IN$: $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$.

- $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+2}} \leq 1$ facile à vérifier car (u_n) est décroissante et $u_n > 0$ pour tout $n \in IN$.
- $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$?

On peut écrire $u_{2n} \geq u_{2n+1} > 0 \Rightarrow \frac{1}{u_{2n}} \leq \frac{1}{u_{2n+1}}$

multiplier les deux membres par u_{2n+2}

remarquer que $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n}} = \frac{2n}{2n+1}$. Conclure

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = 1$ se déduit du passage à la limite de l'encadrement suivant : $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$.

d- Vérifier que : $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = \left(\frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2n+1}\right) \times \frac{2}{\pi}$. et par suite

$$\left(\frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}\right)^2 \times \left(\frac{2}{2n+1}\right) = \pi \left(\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}\right)$$

En déduire la limite.