Proposé par M.Mechmeche Imed

Un corrigé de l'épreuve de mathématique

du bac math, session principale 2023

Exercice 1 (4.5 points)

1. Soit $z \neq i$. $z'-i = \dfrac{iz+2}{z-i} - i = \dfrac{iz+2-iz-1}{z-i} = \dfrac{1}{z-i}$ équivaut à $(z'-i)(z-i)=1$

2. On a $(z'-i) = \dfrac{1}{z-i} \neq 0$ donc $z' \neq i$.

3. $z=z' \iff z = \dfrac{iz+2}{z-i} \iff z^2-2iz=2 \iff (z-i)^2=1 \iff (z=1+i \text{ ou } z=-1+i)$

   Donc, l'ensemble des points M tel que $M=M'$ est : $\{B,C\}$

4. a) $\dfrac{z_M-z_A}{z_{M'}-z_A} = \dfrac{z-i}{z'-i} = \dfrac{(z-i)^2}{\underbrace{(z'-i)(z-i)}_{1}} = (z-i)^2$

   Donc A, M et M' sont alignés si et seulement si $(z-i)^2$ est un réel.

   b) On pose $z=x+iy$ avec $x,y \in \mathbb{R}$. $(z-i)^2 = (x+i(y-1))^2 = x^2-(y-1)^2+2ix(y-1)$

   Donc $(z-i)^2 \in \mathbb{R} \iff x(y-1)=0 \iff (x=0 \text{ ou } y=1)$

   D'où l'ensemble des points M tel que les points A, M et M' soient alignés

   est $\Delta_1 \cup \Delta_2$ privé du point A , avec $\Delta_1 : x=0$ et $\Delta_2 : y=1$

5. On sait que pour tout point $M(z \neq i)$, $(z-i)(z'-i)=1$

   Donc $AM.AM' = |z-i|\,|z'-i| = |(z-i)(z'-i)| = |1| = 1$ et

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}\right) &\equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}\right) \quad [2\pi] \\ &\equiv \arg(z-i) \quad [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\tfrac{1}{z'-i}\right) [2\pi] \\ &\equiv -\arg(z'-i) \ [2\pi] \\ &\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{AB}}\right) \quad [2\pi]\end{aligned}$$

6. a) On a $z_K = z_A + e^{i\frac{\pi}{4}} \iff z_K - z_A = e^{i\frac{\pi}{4}} \iff \begin{cases} \mathrm{AK}=1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AK}}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$

   D'où d'après la question 5. $AK'=1$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

   b) K' est le symétrique de K par rapport à la droite (AB)

   c) $M \in \left]AK\right) \iff \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AM}}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

$$\iff \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AM'}}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi] \iff M' \in \left]AK'\right)$$

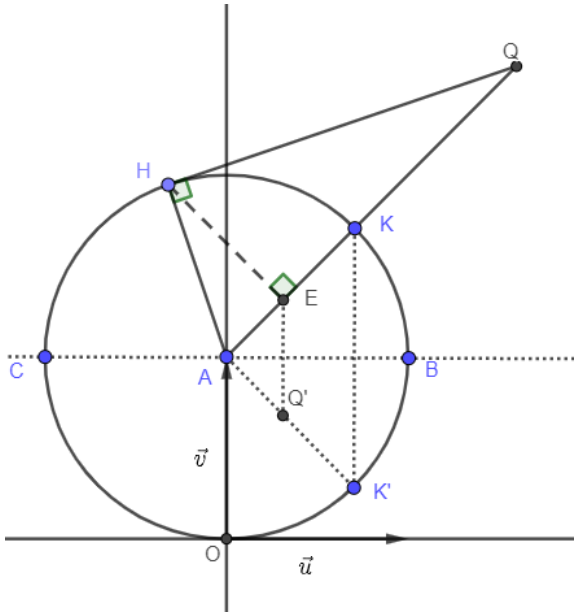
   Donc lorsque M décrit $]AK)$, le point M' décrit $]AK')$

7. a) Le triangle AHQ est rectangle en H et E est le pied de la hauteur issue de H

   Alors $AQ.AE = AH^2 = 1^2 = 1$

   b) Comme $Q \in]AK)$ alors $Q' \in]AK')$, de plus on a $AQ.AQ'=1 \Longrightarrow AQ'=AE$

   D'où la construction (voir figure).



Exercice 2 (6 points)

1. a) $CBED$ est un parallélogramme $\Longrightarrow CD = BE$ et ABC est isocèle en $A \Longrightarrow AC = AB$

et comme $CD = \text{AC}$ alors $AB = BE$ et $AB \neq 0$ alors il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = B$ et $f(B) = E$

b) L'angle de f est : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) \quad [2\pi]$

Donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. f est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3} \neq 0$, f est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

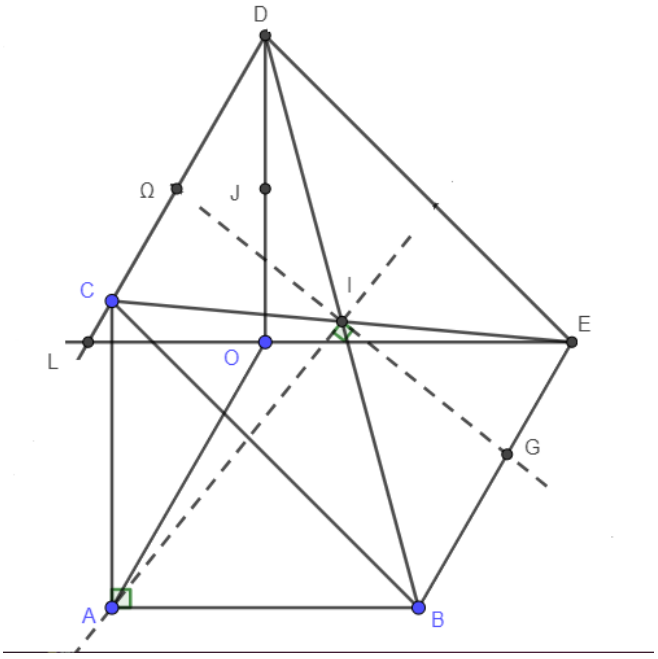
c) Soit O le centre de f . Alors $\{O\} = \text{med}\,[AB] \cap \text{med}\,[BE]$

d) Comme $f(A) = B$ alors $OA = OB$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \Longrightarrow OAB$ est équilatéral

De même $f(B) = E \Longrightarrow OBE$ est équilatéral, d'où $OA = AB = BE = EO$ et par suite $OABE$ est un losange .

2. On a $S(A) = I$ et $S(O) = J$. Dans le triangle OBD , on a $I = O * D$ et $J = B * D \Longrightarrow \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\vec{IJ}$

Donc $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{IJ}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\frac{IJ}{AO} = \frac{IJ}{BO} = \frac{1}{2}$, d'où S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



3. a) $h(O)=S\circ f^{-1}(O)=S(O)=J$ et $h(B)=S\circ f^{-1}(B)=S(A)=I$

b)

h est la composé d'une similitude directe S d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$ et d'une similitude directe f^{-1} d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 1 $\Big\}\Longrightarrow$ h est une similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=0$,et de rapport $\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

h est donc une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$, et comme $h(O)=J$ et $h(B)=I$, alors le centre de h est $(OJ)\cap(BI)=\{D\}$, donc $h=h_{\left(D,\frac{1}{2}\right)}$.

4. a) On a $CBED$ est un parallélogramme $\Longrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BE}$ et $OABE$ est un losange $\Longrightarrow \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BE}$

D'où $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AO}$ qui est équivalent à $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AC}$ et par suite $\underline{(OD) \text{ est parallèle à } (AC)}$. De plus on a :

$\left.\begin{array}{l}(OE)//(AB)\\(AC)\perp(AB)\end{array}\right\}\Longrightarrow (AC)\perp(OE)$ et comme $(OD)//(AC)$ alors $\underline{(OD)\perp(OE)=(OL)}$.

b) On sait déjà que $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AO}$ qui est équivalent à $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AC}$

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DO}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\ [2\pi]$

D'où $\underline{\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DO}}\right)\equiv -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\equiv\ \frac{\pi}{6}\ [2\pi]}$

c) Le triangle LOD est rectangle en O et $\Omega=L*D$, donc $\underline{\Omega L=\Omega O}$ (1)

et comme $\left(\widehat{\overrightarrow{DL},\overrightarrow{DO}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DO}}\right)\equiv\ \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ alors $\underline{\left(\widehat{\overrightarrow{LO},\overrightarrow{L\Omega}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{LO},\overrightarrow{LD}}\right)\equiv\ \frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$ (2)

D'après (1) et (2) le triangle $LO\Omega$ est équilatéral direct $\Longrightarrow f(\Omega)=L$

d) On a $h=S\circ f^{-1}\Longleftrightarrow\ S=h\circ f$ alors $\underline{S(\Omega)=h\circ f(\Omega)=h(L)=\Omega \text{ car } \Omega=L*D}$

S est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}\neq 1$, donc elle admet un unique point invariant qui est son centre

Donc Ω est le centre de S.

5. a) $K=S(B)=h\circ f(B)=h(E)\Longleftrightarrow \overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\ \Longleftrightarrow K$ est le milieu de $[DE]$.

b) On sait que les points L,O et E sont alignés, et que $\left.\begin{array}{l}f(\Omega)=L\\f(O)=O\\f(B)=E\end{array}\right\}\Longrightarrow \Omega$, O et B sont alignés .

Ω , O et B sont alignés et on a $\left.\begin{array}{l}S(\Omega)=\Omega\\S(O)=J\\S(B)=K\end{array}\right\}\Longrightarrow \Omega$, J et K sont alignés .

et par suite les droites (KJ) et (OB) se coupent en Ω .

6. a) On a $S(A)=I\Longleftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega I}}\right)\equiv\ \frac{\pi}{3}\ [2\pi]\ \text{ donc}\\ \Omega I=\frac{1}{2}\ \Omega A\end{array}\right.\quad\begin{array}{l}\cos(\widehat{A\Omega I})=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\\ \overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega I}=\Omega A\times\Omega I\times\cos(\widehat{A\Omega I})\\ \qquad\qquad =2\Omega I\times\Omega I\times\frac{1}{2}=\Omega I^2\end{array}$

b) $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega I}=\Omega I^2\Longleftrightarrow\ \overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega I}-\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{\Omega I}=0\ \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega I}.(\overrightarrow{\Omega A}-\overrightarrow{\Omega I})=0\ \Longleftrightarrow\ \overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{IA}=0$

et par suite $(\Omega I)\perp(IA)$.

Alors on a : $\left.\begin{array}{l}(\Omega I)\perp(IA)\\(IG)\perp(IA)\end{array}\right\}\Longrightarrow (\Omega I)//(IG)$ donc $\Omega\in(IG)$.

Exercice 3 (3 points)

1. a) $d\,|a+2\Longrightarrow d\,|a(a+2)$ donc $d\,|a^2+2a-(a+2)$ c'est-à-dire $d\mid a^2+a-2$

D'où $a^2+a-2\equiv 0\,(\text{mod}\,d)\Longleftrightarrow a^2+a-1\equiv 1\,(\text{mod}\,d)$.

b) On pose $d=(a+2)\wedge(a^2+a-1)$ alors $d\geqslant 1$

supposons $d\geqslant 2$, d'une part on a $d|a+2$ et $d|a^2+a-1$ et d'autre part $a^2+a-1\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,d)$ ce qui est absurde

Dond $d=1$ et par suite $(a+2)$ et (a^2+a-1) sont premiers entre eux .

2. a) $(a^2+a-1)\times 1-(a+2)\times(a-1)=a^2+a-1-(a^2+a-2)=1$

Donc le couple $(1,a-1)$ est solution de l'équation (E_a)

b) (x,y) est solution de $(E_a)\iff (a^2+a-1)\,x-(a+2)\,y=1$

$$\iff (a^2+a-1)\,x-(a+2)\,y=(a^2+a-1)\times 1-(a+2)\times(a-1)$$

$$\iff (a^2+a-1)\,(x-1)=(a+2)(y-(a-1)) \quad (*)$$

Donc $(a^2+a-1)|\,(a+2)(y-(a-1))$ et comme $(a+2)\wedge(a^2+a-1)=1$ alors d'après le Lemme de Gauss

$(a^2+a-1)\,|\,(y-(a-1))\Longrightarrow y-(a-1)=k\,(a^2+a-1)$, $k\in\mathbb{Z}$

puis en remplacant dans (*) , on obtient $x-1=k\,(a+2)$

On vérifie bien que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, le couple $(1+k\,(a+2);(a-1)+k\,(a^2+a-1))$ est solution de (E_a) .

Alors $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(1+k\,(a+2);(a-1)+k\,(a^2+a-1))\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$

3. $(a+2)\,n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,(a^2+a-1))\iff$ il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $(a+2)\,n=1+p(a^2+a-1)$

$(a+2)\,n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,(a^2+a-1))\iff$ il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $(p,-n)$ soit solution de (E_a)

Donc l'ensemble des entiers n tels que $(a+2)\,n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,(a^2+a-1))$, est $\{1-a+k\,(a^2+a-1),k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 4 (6.5 points)

Partie A.

1. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}(1-\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}-\underbrace{\sqrt{x}\ln x}_{0}=0=f(0)$. Donc f est continue à droite en 0 .

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}_{+\infty}\left(\underbrace{1-\ln x}_{+\infty}\right)=+\infty$. Donc f n'est pas dérivable à droite en 0

et ξ admet au point d'abscisse 0, une demi-tangente verticale .

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,(1-\ln x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$.

Donc ξ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$.

3. a) Soit $x>0$, $f(x)=\sqrt{x}(1-\ln x)$.

Alors $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,(1-\ln x)+\sqrt{x}\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,(1-\ln x)-\frac{1}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\ln x)$.

b) Tableau de variation de f

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	|	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	
	0				$-\infty$

4. a) $T: y=f'(e)\,(x-e)+f(e)$

$=\frac{-1}{\sqrt{e}}\,(x-e)$

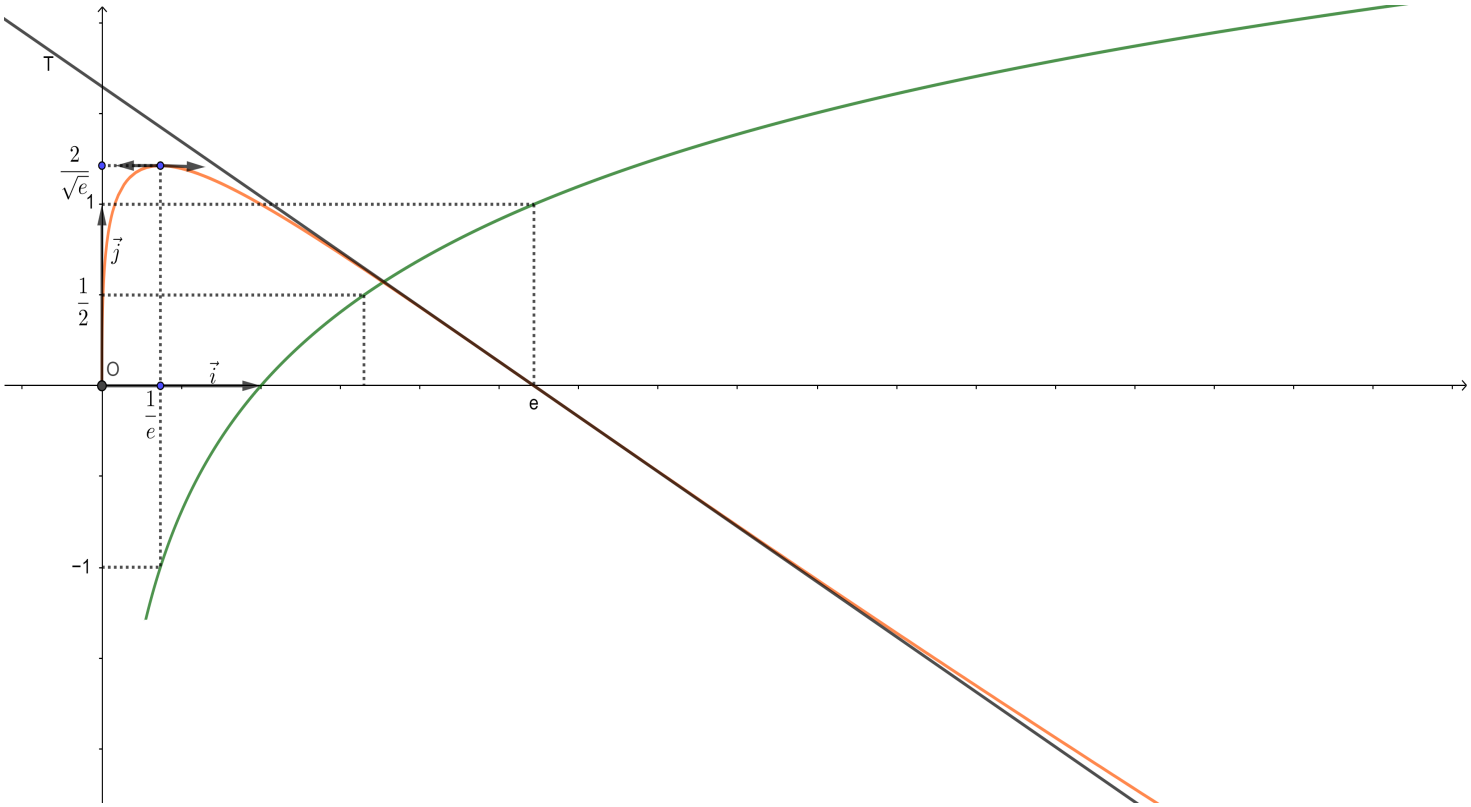
b) D'après le tableau de variation de f', on a : $f'(t)\geqslant\frac{-1}{\sqrt{e}}$ pour tout $t\in\left]0,+\infty\right[$

Donc en intégrant les deux membres de l'inégalité de e à x , on obtient :

si $x \geqslant e$ alors $f(x) - f(e) \geqslant \frac{-1}{\sqrt{e}}(x-e)$ et si $x \in]0, e[$ alos $f(x) - f(e) \leqslant \frac{-1}{\sqrt{e}}(x-e)$, comme $f(e) = 0$

Alors $f(x) \geqslant \frac{-1}{\sqrt{e}}(x-e)$ si et seulement si $x \geqslant e$.

5.



Partie B.

$G_n(x) = \int_x^e \sqrt{t}(1-\ln t)^n \, dt$ et $H_n(x) = \int_{\ln x}^1 e^{\frac{3}{2}t}(1-t)^n \, dt$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0, +\infty[$

1. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}\,(1-\ln t)^n$ est continue sur $]0, +\infty[$ et e $\in]0, +\infty[$, donc G_n est dérivable sur $]0, +\infty[$

   La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $t \mapsto e^{\frac{3}{2}t}(1-t)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$

   Donc H_n est dérivable sur $]0, +\infty[$.

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $G_n'(x) = -\sqrt{x}\,(1-\ln x)^n$ et $H_n'(x) = -\frac{1}{x} e^{\frac{3}{2}\ln x}(1-\ln x)^n$

   $H_n'(x) = -\frac{1}{x}(\sqrt{x})^3(1-\ln x)^n = -\sqrt{x}\,(1-\ln x)^n = G_n'(x)$

   Donc pout tout $x > 0$, $G_n'(x) = H_n'(x) \Longrightarrow G_n(x) = H_n(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ et comme $G_n(e) = H_n(e) = 0$

   Alors $G_n(x) = H_n(x)$ pour tout x>0

3. a) $u_n = G_n(1) = H_n(1) = \int_0^1 e^{\frac{3}{2}t}(1-t)^n \, dt$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1 \Longrightarrow 1 \leqslant e^{\frac{3}{2}t} \leqslant e^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow (1-t)^n \leqslant e^{\frac{3}{2}t}(1-t)^n \leqslant e^{\frac{3}{2}}(1-t)^n$

   Les trois fonctions sont continues sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 (1-t)^n \, dt \leqslant \int_0^1 e^{\frac{3}{2}t}(1-t)^n \, dt \leqslant e^{\frac{3}{2}} \int_0^1 (1-t)^n \, dt$

   et on a $\int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{-1}{n+1}\Big[(1-t)^{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, **Alors pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e^{\frac{3}{2}}}{n+1}$**

   b) On a : $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e^{\frac{3}{2}}}{n+1} \\ \lim \frac{1}{n+1} = 0 \\ \lim \frac{e^{\frac{3}{2}}}{n+1} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\ u_n = 0$.

4. a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, $T_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$.

b) On sait que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a , $\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e^{\frac{3}{2}}}{n+1} \Longrightarrow \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{e^{\frac{3}{2}}}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{e^{\frac{3}{2}}}{n(n+1)} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{u_n}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{e^{\frac{3}{2}}}{n(n+1)} \Longrightarrow T_k \leqslant S_k \leqslant e^{\frac{3}{2}} T_k$

Donc $S_k \leqslant e^{\frac{3}{2}} T_k$, or $T_k = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$, D'où $S_k \leqslant e^{\frac{3}{2}}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

c) $S_{k+1} - S_k = \frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 0 \Longrightarrow$ la suite (S_k) est croissnte , et comme elle est majorée par $e^{\frac{3}{2}}$, alors elle est convergente .

Soit a sa limite . On a : $\left.\begin{array}{l} T_k \leqslant S_k \leqslant e^{\frac{3}{2}} T_k \\ \lim T_k = 1 \\ \lim S_k = a \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 \leqslant a \leqslant e^{\frac{3}{2}}$.