CORRIGÉ DU SUJET DE MATHS
BAC 2018 SESSION DE CONTROLE

SECTION MATHS

PROPOSÉ PAR
Mr SALAH HANNACHI

EXERCICE N1 :

1) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

$\equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ Ainsi f est un déplacement d'angle non nul $-\frac{2\pi}{3}$ d'où f est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et de centre O car il est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [AC] (O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC).

2) a) $g(A) = C$ et $g(B) = A$

1ère méthode :

Méd([AC])∩Méd([AB])= {0} alors Méd([AC])≠Méd([AB]) donc l'antidéplacement g est une symétrie glissante.

2éme méthode :

$gog(B) = g(A) = C$ alors $gog \neq id_{\mathcal{P}}$ (où $id_{\mathcal{P}}$ est l'identité du plan orienté $\mathcal{P}$).

D'où l'antidéplacement g n'est pas une symétrie orthogonale ce qui implique que g est une symétrie glissante.

b) $gog(B) = g(A) = C$ alors $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$ est le vecteur de la symétrie glissante g.

$g(A) = C$ et $g(B) = A$ alors l'axe Δ de g passe par les milieux des segments [AC] et [AB] donc Δ et (BC) sont parallèles (droite joignant les milieux de deux cotés d'un triangle). Par conséquent Δ coupe le segment [AI] en son milieu perpendiculairement ((AI) est une médiatrice dans le triangle ABC). D'où Δ est la médiatrice de [AI].

Ainsi $g = t_{\overrightarrow{BI}} \circ S_{\Delta}$

3) a) $\varphi = g \circ h \circ f$ est la composée d'un antidéplacement g (similitude indirecte de rapport 1) est d'une similitude directe $h \circ f$ (composée d'une homothétie et d'un déplacement) de rapport $|k|$ où k est le rapport de h. Donc φ est une similitude indirecte de rapport $|k| = \frac{AI}{AO} = \frac{3}{2}$ car O est le centre de gravité du triangle équilatéral ABC.

b) $\varphi(B) = g \circ h \circ f(B) = g \circ h\,(A) = g(A) = C$

$\varphi(O) = g \circ h \circ f(O) = g \circ h\,(O) = g(I) = t_{\overrightarrow{BI}} \circ S_{\Delta}(I) = t_{\overrightarrow{BI}}(A) = D$

4) a) On a : E= $\varphi(C)$, C= $\varphi(B)$ et D= $\varphi(0)$ alors l'image par φ du triangle OBC est le triangle DCE. De plus OBC est isocèle en O alors DCE est isocèle en $\varphi(0)$ =D.

b) On a : E= $\varphi(C)$, C= $\varphi(B)$ et D= $\varphi(0)$ alors $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$ (la similitude indirecte φ transforme une mesure d'un angle orienté en son opposé)

Alors $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ (car $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$)

c) Voir la figure

d) φ est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport $\frac{3}{2}$ alors la composée $\varphi \circ \varphi$ est une homothétie de centre Ω et e rapport $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

D'autre part : φ o $\varphi(B) = \varphi(C) = E$ alors $\overrightarrow{\Omega E} = \frac{9}{4}\overrightarrow{\Omega B}$

$\overrightarrow{\Omega E} = \frac{9}{4}\overrightarrow{\Omega B}$ équivaut à $\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BE} = \frac{9}{4}\overrightarrow{\Omega B}$

équivaut à $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$

- Construction de Ω :
  - On peut construire le point Ω' tel que $\overrightarrow{B\Omega'} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$ (en utilisant le théorème de Thalès)
  - Ensuite construire le point Ω tel que $\Omega = S_B(\Omega')$

5) $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ME}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) + \left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{ME}\right)[2\pi]$

$\equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \pi - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}\right)[2\pi]$

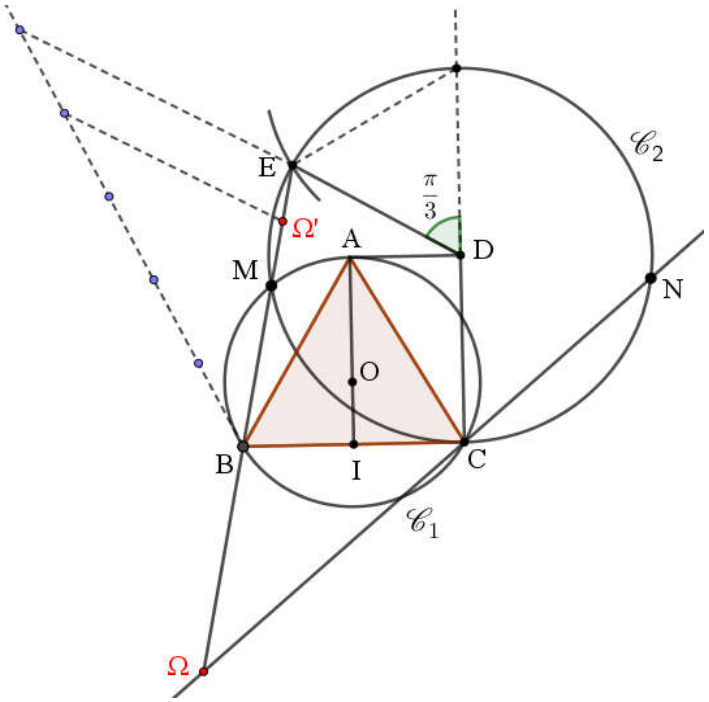
$\equiv \frac{\pi}{3} + \pi - \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\equiv \pi[2\pi]$ alors M, B et E sont alignés et par la suite Ω, B et M sont alignés.

- Ω, B et M sont alignés alors $\varphi(\Omega) = \Omega$, $\varphi(B) = C$ et $\varphi(M) = N$ sont alignés.

  De plus $\varphi(M) \in \varphi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ ($\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre $\varphi(0)$ =D et passant par le point $\varphi(B)$ =C)

  alors $N \in (\Omega C) \cap \mathcal{C}_2$ tel que $N \neq C$ (car $M \neq B$ et φ est une bijection du plan dans lui-même).



EXERCICE N2 :

1) a) $p(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $p(F_1/E) = \frac{1}{2}$, $p(F_1/\overline{E}) = \frac{2}{3}$

b) $p(F_1) = p(F_1/E).p(E) + p(F_1/\overline{E}).p(\overline{E}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

2) Effectuer n lancers successifs, c'est effectuer n épreuves successives et indépendantes

alors $p(F_n/E) = (p(F_1/E))^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $p(F_1/\overline{E}) = \left(p(F_1/\overline{E})\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$p(F_n) = p(F_n/E).p(E) + p(F_n/\overline{E}).p(\overline{E}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

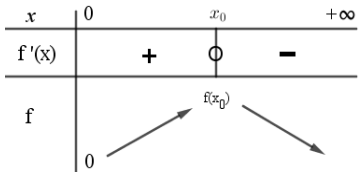
3) a) $X_n(\Omega) = \{0, n\}$

$$p(X_n = 0) = p(\overline{F_n}) = 1 - \frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$$

$$p(X_n = n) = p(F_n) = \frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$$

b) $E(X_n) = 0 \times p(X_n = 0) + n \times p(X_n = n) = \frac{n}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$

c) Voici le tableau de variation de la fonction f :



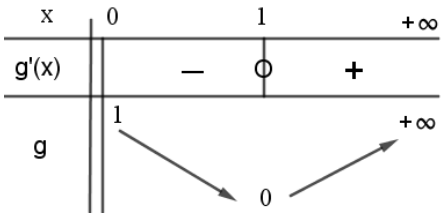
f est maximale sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $x = x_0$.
$x_0 \in [1,2]$ alors $E(X_n)$ =f(n) est maximale si et seulement si n∈ {1,2}
On remarque dans le graphique que f(2)>f(1) alors
$E(X_n)$ est maximale si et seulement si n=2

EXERCICE N3 :

1) $g(x) = 1 - x + xlnx \quad ; \quad x > 0$

a) $g'(x) = lnx \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} - 1 + lnx\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 1$



b) Le réel $g(1) = 0$ est un minimum absolu de g alors pour tout $x > 0$, on a : $g(x) \geq 0$ ce qui implique que $1 + xlnx \geq x$ pour tout $x > 0$

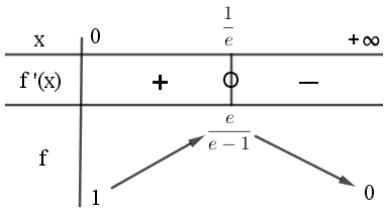
2) a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{1+xlnx} = 1 = f(0)$, alors f est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{1+xlnx}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{-lnx}{1+xlnx} = +\infty$. Alors (C_f) admet au point A(0,1) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+xlnx} = 0$. Alors l'axe des abscisses est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3) a) On pose $u(x) = 1 + xlnx$ alors $f'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{1+lnx}{(1+xlnx)^2}$, pour tout $x > 0$.

b) Tableau de variation de f :



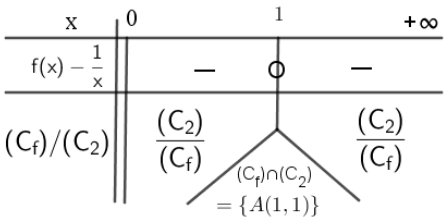
4) a) • Le point A est l'intersection de (C_1) et la droite d'équation $y = ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$

• Le point B est le point de (C_2) dont le projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{\imath})$ est le point K défini par : K= $t_{\vec{\imath}}(H')$ où $H' = S_0(H)$ tel que H est le point de l'axe $(O, \vec{\imath})$ d'abscisse $\frac{1}{e}$

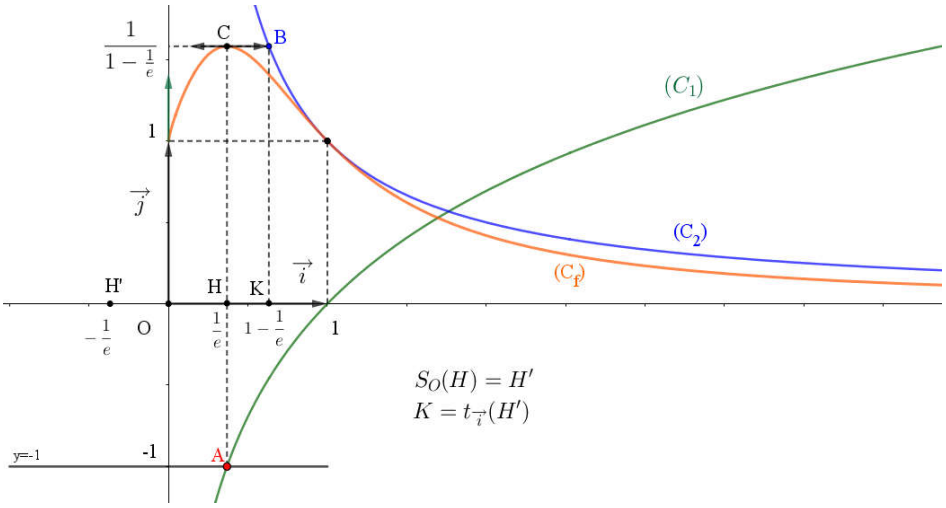
b) Pour tout $x > 0$, $1 + xlnx \geq x$ implique que $\frac{1}{1+xlnx} \leq \frac{1}{x}$

D'où $f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$

• Position de (C_f) par rapport à (C_2) :



c) La courbe (C_f) :



5) a) Pour tout $t \geq 1$, on a : $t.lnt \geq 0$ alors $t + t.lnt \geq 1 + t.lnt$

Cela signifie que $\frac{1}{t+t.lnt} \leq \frac{1}{1+t.lnt}$ D'où $\frac{1}{t+t.lnt} \leq f(t)$ pour tout $t \geq 1$.

b) Pour tout $t \geq 1$, on a : $\frac{1}{t+t.lnt} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$ alors $\int_1^x \frac{1}{t+t.lnt}dt \leq \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x \frac{1}{t}dt \ \forall x \geq 1$

signifie que $\int_1^x \frac{\frac{1}{t}}{1+lnt}dt \leq F(x) \leq lnx$

signifie que $[ln(1 + lnt)]_1^x \leq F(x) \leq lnx$

signifie que $ln(1 + lnx) \leq F(x) \leq lnx$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[ln(1 + lnx)] = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

Pour tout $x \geq 1$, on a : $\frac{ln(1+lnx)}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{lnx}{x}$ et on a de plus $ln(1 + lnx) \geq 0, \ \forall x \geq 1$

(car $1 + lnx \geq 1$ pour tout $x \geq 1$)

alors $0 \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{lnx}{x} \ \forall x \geq 1$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

6) a) La fonction F est dérivable sur $[1,+\infty[$ car f est continue sur $[1,+\infty[$ et on a $F'(x) = f(x)$

Alors la fonction $h : x \mapsto x - F(x)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a : $h'(x) = 1 - f(x)$

Et comme $f(x) \leq \frac{1}{x} \ \forall x > 0$ alors $f(x) < 1 \ \forall x > 1$ donc h est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et puisque h est continue sur $[1,+\infty[$ alors h est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Ainsi h réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $h([1,+\infty[) = \left[h(1), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[= [1,+\infty[$

En effet : $h(1) = 1 - F(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{F(x)}{x}\right) = +\infty$

b) Pour tout $n \in IN^*$, $n \in [1,+\infty[$ et comme de plus h est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, alors $\forall\, n \in IN^*$ l'équation $h(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n \in [1,+\infty[$.

c) $h(\alpha_n) = n$ equivaut à $\alpha_n = h^{-1}(n)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} h^{-1}(n)$

$h^{-1}([1,+\infty[) = [1,+\infty[$ et h^{-1} est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} h^{-1}(n) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

d) On a : $h(\alpha_n) = n$ cela signifie que $\alpha_n - F(\alpha_n) = n$

signifie que $1 - \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{n}{\alpha_n}$

signifie que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1-\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$

- On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$ (c'est le principe de la limite d'une fonction composée). D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1$

EXERCICE N4 :

1) (E) : $z^2 - (1+i)z - i = 0$. On note $(a = 1,\ b = -(1+i)$ et $c = -i)$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1+i)^2 + 4i = 6i = \left[\sqrt{3}(1+i)\right]^2$

Une racine carrée de Δ est $\delta = \sqrt{3}(1+i)$ alors les solutions de l'équation (E) sont :

$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+i)}{2}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{(1-\sqrt{3})(1+i)}{2}$

2) Pour tout $z \neq i$, l'équation $z = \frac{z+i}{z-i}$ equivaut à $z^2 - iz = z + i$

equivaut à $z^2 - (1+i)z - i = 0$

equivaut à $z = z_1$ où $z = z_2$

Ainsi pour tout nombre complexe $z \notin \{1, i, z_1, z_2\}$, le point M$(z)$ et le point M'(z') sont distincts.

3) a) $z = i + 2e^{i\theta}$ equivaut à $z - i = 2e^{i\theta}$

equivaut à $\begin{cases} |z-i| = 2 \\ Arg(z-i) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

equivaut à $\begin{cases} \text{BM} = 2 \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{BM}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

Ainsi le point M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2 lorsque θ décrit IR.

b) $z' = \frac{z+i}{z-i} = \frac{2i+2e^{i\theta}}{2e^{i\theta}} = \frac{i+e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\left(i + e^{i\theta}\right) = 1 + ie^{-i\theta}$

c) $z' = 1 + ie^{-i\theta}$ equivaut à $z' - 1 = ie^{-i\theta}$

equivaut à $z' - 1 = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

equivaut à $\begin{cases} |z'-1| = 1 \\ Arg(z'-1) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi] \end{cases}$

equivaut à $\begin{cases} \text{AM}' = 1 \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{AM}'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi] \end{cases}$

d) (θ décrit IR) signifie ($\frac{\pi}{2} - \theta$ décrit IR)

Alors l'ensemble des points M' est le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1 lorsque M décrit le cercle Γ.

4) a) $z_P = \frac{z_M + z_{M'}}{2} = \frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$

b) $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}+2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta}+ie^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\theta}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}+e^{i\frac{3\pi}{4}}e^{-i\theta}}{2}$

$= \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}+e^{i(\frac{3\pi}{4}-\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}-e^{i(\frac{7\pi}{4}-\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}-e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2}$

c) $z_Q = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}-e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}+2e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}-3e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}}{2} + \frac{4cos(\frac{\pi}{4}+\theta)}{2} - \frac{3e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2}$

$= \frac{i\sqrt{2}}{2} + 2cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) - \frac{3}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) - isin(\frac{\pi}{4}+\theta)\right]$

$= \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) + i\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\right]$

5) a) On pose $z_Q = x_Q + iy_Q$ où $(x_Q, y_Q) \in IR^2$

On a : $z_Q = \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) + i\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\right]$ équivaut à $\begin{cases} x_Q = \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \\ y_Q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}sin(\frac{\pi}{4}+\theta) \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 2x_Q = cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \\ \frac{2y_Q-\sqrt{2}}{3} = sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \end{cases}$

Alors $(2x_Q)^2 + \left(\frac{2y_Q-\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1$. Cela signifie que $4{x_Q}^2 + \frac{4}{9}\left(y_Q - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

Ainsi le point Q varie sur l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation : $4x^2 + \frac{4}{9}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$ lorsque M varie sur le cercle Γ. (Remarque : Dans cette question il faut comprendre qu'on n'a pas demandé de montrer que cette équation est celle d'une ellipse)

b) Les étapes de construction du point Q :

- 1- Construire le point M' (pour cela on peut se servir des méthodes de construction des angles correspondants et des angles complémentaires).
- 2- Construire le point P milieu de [MM']
- 3- Construire sur l'ellipse $\mathcal{E}$ le point Q image du point P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

